

# METODO ESTADISTICO PARA LA IDENTIFICACION DE LAS PRESIONES ACTUANTES EN UN TUNEL

Molina, F.J.(<sup>\*</sup>); Gómez, M.S.(<sup>\*\*</sup>); Huerta, C.(<sup>\*\*</sup>); Alarcón E.(<sup>\*\*</sup>)

(<sup>\*</sup>) Universidad de Oviedo  
Departamento de Construcción e Ingeniería  
de Fabricación  
Ctra. de Castiello, s/n  
33204 GIJON (ASTURIAS)

(<sup>\*\*</sup>) Universidad Politécnica de Madrid  
Departamento Mecánica Estructural y  
Construcciones Industriales  
c/ José Gutiérrez Abascal, 2  
28006 MADRID

## RESUMEN

Una de las mayores incertidumbres que se presentan en el cálculo de un túnel y en la determinación de su vida residual es, sin duda, el conocimiento del estado tensional del terreno, el cual es precisamente la principal sollicitación a que se ve sometida esta estructura.

El método que se propone está basado en un tratamiento estadístico de ciertas mediciones experimentales obtenidas in situ sobre el túnel en construcción, junto con la información determinista relativa al tipo de estructura utilizada. El modelo estadístico empleado es lineal y formalmente análogo a un modelo de regresión, por lo que le es aplicable la misma teoría. Este hecho permite no sólo la estimación de los parámetros que determinan la distribución de presión, sino también su margen de variación estadístico mediante el cálculo de intervalos de confianza.

## ABSTRACT

One of the biggest uncertainties which are met in the analysis of a tunnel and in the determination of its residual life is doubtless the knowledge of the stress field of the soil, which is just the main action upon this structure.

The proposed method is based in a statistic treatment of several experimental in situ measurements which are got during the construction of the tunnel, aside the deterministic information of the type of structure that has been used. The statistic model is linear and analog to a regression model, so that its same theory is applicable. This fact allows not just the estimation of the parameters of the distribution of pressure, but even the knowledge of its statistic range of variation by the computation of confidence intervals.

## 1. INTRODUCCION.-

En el cálculo de la respuesta estructural de un túnel se suelen utilizar, por un lado, un modelo estructural más o menos elaborado que engloba el sostenimiento o revestimiento y su interacción con el terreno, y por otro, una distribución de presiones actuantes. La Fig.1 muestra un modelo estructural plano sometido a una distribución de presiones.

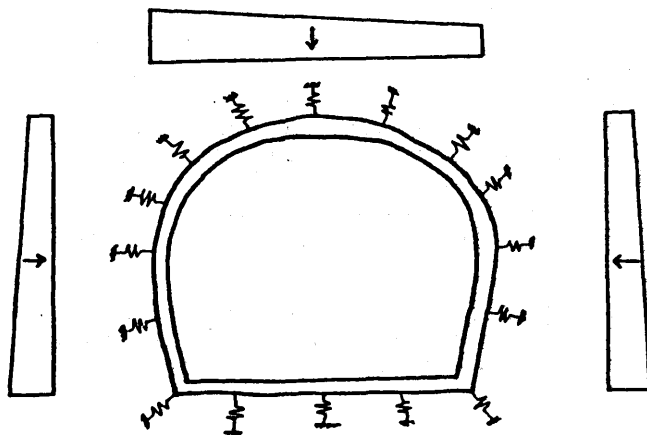


Fig. 1: Problema genérico.

Así como las características del modelo estructural se pueden conocer con cierto grado de precisión, la distribución de presiones es difícil de estimar o medir directamente, por lo que supone una gran fuente de incertidumbre en el cálculo generalmente.

En este trabajo se propone un método indirecto para la estimación de dichas presiones que aprovecha la información determinista de un modelo estructural ya elaborado y diferentes tipos de medidas in situ realizadas mediante:

- Células de presión transversales al revestimiento (Fig.2a).
- Células de presión axiales al revestimiento (Fig.2b).
- Extensómetros capaces de medir una componente del desplazamiento absoluto de un punto (Fig.2c).
- Convergencias capaces de medir una componente del desplazamiento relativo entre dos puntos (Fig.2d).

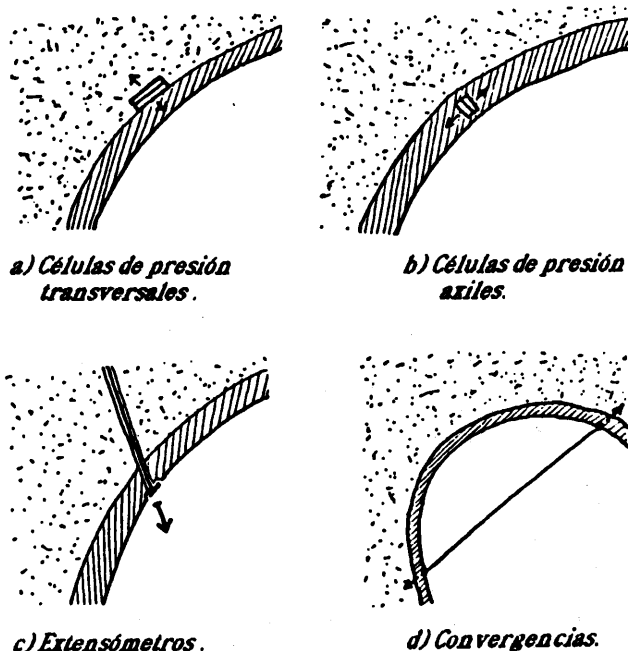


Fig. 2: Instrumentos de medida a utilizar.

## 2. METODO.-

Tanto el modelo estructural como el modelo de distribución de presiones serán discretos de manera que su estado quede perfectamente definido mediante una serie de parámetros que serán los desplazamientos de los nudos, en el primer caso, y el valor de las presiones en determinados puntos en el segundo. Si dichos modelos son lineales, las medidas obtenidas en los distintos tipos de captadores se pueden escribir como:

$$y = A x \quad (1)$$

donde  $y$  es un vector que contiene las mediciones,  $x$  es el vector que contiene los parámetros del modelo y  $A$  es una matriz de influencia.

Cuando el número  $N$  de datos recogidos en  $y$  supera el número  $M$  de incógnitas recogidas en  $x$ ,  $A$  no es una matriz cuadrada, pero la estimación mínimo cuadrática de las incógnitas viene dada por:

$$x = \alpha A^T y \quad (2)$$

donde

$$\alpha = [A^T A]^{-1} \quad (3)$$

Se proponen a continuación dos versiones distintas del sistema (1).

### 2.1. Primera versión.-

Se utilizarán las siguientes ecuaciones:

- Equilibrio:

$$A_u^{eq} u + A_p^{eq} p = y^{eq} \quad (4)$$

donde  $A^{eq}$  es la matriz de rigidez de la estructura,  $u$  es el vector de desplazamientos,  $A_p^{eq}$  recoge la influencia de los parámetros de presión  $p$  sobre las cargas equivalentes en los nudos e  $y^{eq}$  son las cargas equivalentes en ausencia de las presiones  $p$  (debidas a la carga de timpanos y conocidas).

- Células de presión transversales:

$$A_p^{cpt} p = y^{cpt} \quad (5)$$

donde  $A_p^{cpt}$  recoge la influencia de los parámetros de presión e  $y^{cpt}$  las medidas. Se entiende que dichas medidas no tienen relación directa con los desplazamientos.

- Células de presión axiales

$$A_u^{cpa} u + A_p^{cpa} p = y^{cpa} \quad (6)$$

donde  $A_u^{cpa}$  y  $A_p^{cpa}$  recogen la influencia de los desplazamientos y de las presiones, respectivamente, en las medidas  $y^{cpa}$ .

- Extensómetros

$$A_u^{exte} u + A_p^{exte} p = y^{exte} \quad (7)$$

con análoga notación.

- Convergencias

$$A_u^{conv} u + A_p^{conv} p = y^{conv} \quad (8)$$

con análoga notación.

Las matrices que aparecen en estas ecuaciones se obtienen a partir del modelo estructural y del modelo de la distribución de presiones utilizando el análisis matricial de estructuras (las fórmulas precisas para los modelos que más adelante se proponen se hallan recogidas en [2]).

Considerando en esta primera versión del método que tanto  $u$  como  $p$  son incógnitas a estimar, se tiene que, englobando las ecuaciones (4) a (8) en el sistema (1), resulta:

$$\begin{bmatrix} y_{eq} \\ y_{cpt} \\ y_{cpa} \\ y_{exte} \\ y_{conv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_u^{eq} & A_p^{eq} \\ 0 & A_p^{cpt} \\ A_u^{cpa} & A_p^{cpa} \\ A_u^{exte} & A_p^{exte} \\ A_u^{conv} & A_p^{conv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \quad (10)$$

cuya solución se obtendría a través de (2) siempre que  $N \geq M$ . En esta versión del método, el número de datos  $N$  es igual al de ecuaciones de equilibrio más el de medidas disponibles en los distintos tipos de captadores:

$$N = NTOGDL + NCPT + NCPA + NEXTE + NCONV$$

mientras que el número de incógnitas  $M$  es igual al número de parámetros de desplazamiento y de presión:

$$M = NTOGDL + NPRES$$

## 2.2. Segunda Versión.-

Esta segunda versión del método parte en principio de las mismas ecuaciones que la primera; pero, aprovechando el carácter determinista de las que se refieren al equilibrio, las condensa suprimiendo a la vez las incógnitas de desplazamiento del sistema (10). Efectivamente despejando el vector de desplazamientos en (4) se tiene

$$u = -Cp + d \quad (13)$$

donde

$$C = (A_u^{eq})^{-1} A_p^{eq} \quad (14)$$

$$d = (A_u^{eq})^{-1} y^{eq} \quad (15)$$

pudiendo ahora (13) ser sustituido a (6) (7) y (8) para obtener el nuevo sistema

$$\begin{bmatrix} y_{cpt} \\ y_{cpa} - A_u^{cpa} d \\ y_{exte} - A_u^{exte} d \\ y_{conv} - A_u^{conv} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p^{cpt} \\ A_p^{cpa} - A_u^{cpa} C \\ A_p^{exte} - A_u^{exte} C \\ A_p^{conv} - A_u^{conv} C \end{bmatrix} [p] \quad (16)$$

que sería la nueva interpretación del sistema (1).

Nuevamente la solución por mínimos cuadrados vendría dado por (2) siempre que  $N \geq M$ , siendo en esta versión el número de datos

$$N = NCPT + NCPA + NEXTE + NCONV$$

y el número de incógnitas

$$M = NPRES$$

Por razones que se comentarán en el apartado 4, esta segunda versión del método presenta ciertas ventajas de cara a la interpretación estadística de los resultados obtenidos.

## 3. MODELO ESTRUCTURAL Y DE LA DISTRIBUCION DE PRESIONES.-

En este primer desarrollo se ha optado por un modelo estructural lo más sencillo posible para el túnel, pero que permita recoger los principales efectos que se han de presentar en este análisis. Dicho modelo es un modelo plano de barras con nudos rígidos ya experimentado con éxito por los autores en otros análisis en túneles.

El revestimiento y/o sostenimiento es representado por una serie de barras de eje recto, que admiten deformación axil y flexión, y la interacción del terreno se introduce a través de otra serie de barras ficticias cuya rigidez a axil equivale a la constante de balasto del terreno (Fig.3).

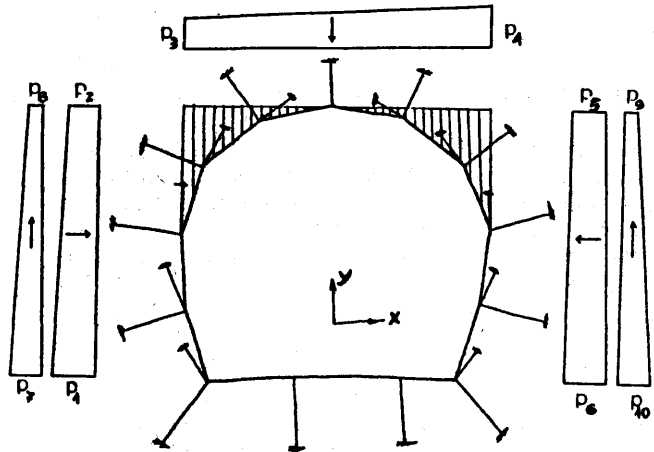


Fig. 3: Modelo estructural y de la distribución de presiones.

El modelo para la distribución de presiones (Fig.3) contempla cinco tipos de presiones actuando simultáneamente sobre el revestimiento, aparte de la carga de timpanos que se supone de valor conocido. Para cada uno de los cinco tipos de presión la distribución es trapezoidal y definida por sus valores extremos. El número de parámetros de presión  $NPRES$  es 10 y dichos parámetros reciben los nombres  $p_1, \dots, p_{10}$ , según se aprecia en la citada figura.

## 4. MODELO ESTADISTICO.-

Para un tratamiento estadístico más riguroso, el sistema (1) será sustituido por:

$$y = Ax + \epsilon \quad (20)$$

que representa un modelo estadístico en el que las mediciones realizadas y dependen linealmente de los parámetros  $x$ , salvo un error aleatorio  $\epsilon$ . Este modelo es formalmente análogo a un modelo de regresión.

Los parámetros incógnita  $x$  pueden ser estimados por  $\hat{x}$  imponiendo la condición de que el error cuadrático medio asociado sea mínimo, es decir, sean las estimaciones a posteriori de las medidas.

$$\hat{y} = A\hat{x} \quad (21)$$

y los errores estimados

$$\hat{\epsilon} = y - \hat{y} = y - A\hat{x} \quad (22)$$

El error cuadrático medio asociado es:

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{N} \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} = \frac{1}{N} (y^T y - 2\hat{x}^T A^T y + \hat{x}^T A^T A \hat{x}) \quad (23)$$

y se hará mínimo cuando:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^2}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{N} (-2A^T y + 2A^T A \hat{x}) = 0 \quad (24)$$

de donde se obtiene que

$$\hat{x} = \alpha A^T y \quad (28)$$

siendo  $\alpha$  la matriz definida en (3).

Con el fin de poder juzgar en cada problema la calidad de las estimaciones (28), sería deseable conocer su distribución de probabilidad como variables aleatorias. Para ello se adoptará la hipótesis de que el error asociado a cada medida del modelo (20) tiene una distribución normal de media cero y desviación típica  $\sigma$ .

$$\epsilon_i \sim N(0 - \sigma) \quad i = 1, \dots, N \quad (30)$$

siendo además independientes estas distribuciones entre sí. Con estas hipótesis y siguiendo la teoría del modelo de regresión se pueden demostrar varios resultados de gran interés:

- La estimación mínimo cuadrática (28) coincide con la estimación máximo verosímil.
- La varianza  $\sigma^2$  de los errores se puede estimar a través de:

$$s^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N \hat{\epsilon}_i^2 \quad (31)$$

donde  $\sigma^2$  tiene una distribución  $\chi^2$  de Pearson con  $N-M$  grados de libertad.

- Las variables

$$t_{N-M} = \frac{\hat{\epsilon}_i}{\sqrt{1 - \beta_{ii}} s} \quad (32)$$

$$t'_{N-M} = \frac{\hat{x}_i - x_i}{\sqrt{\alpha_{ii}} s} \quad (33)$$

tienen una distribución  $t$  de student con  $N-M$  grados de libertad; aunque en el caso de (32) no es estrictamente así porque el numerador y el denominador no son independientes.

Téngase en cuenta que  $\sigma_{ii}$  y  $\beta_{ii}$  son respectivamente el coeficiente  $i$ -ésimo de la diagonal de la matriz definida en (3) y de

$$\beta = \alpha \alpha^T$$

Las expresiones (32) y (33) tienen la siguiente utilidad: la primera de ellas permite constatar la hipótesis de que un determinado dato  $y_i$  sea atípico, lo que se detectaría porque su probabilidad asociada de colas es muy baja:

$$P(|\hat{\epsilon}_i| | t_{N-M}) < \left( \frac{1}{N} \right) \quad (34)$$

Igualmente, con ayuda de (33) se puede construir un intervalo de confianza para el valor real de  $x_i$ . Sea, por ejemplo, para un grado de confianza del 95%

$$P(-t_{N-M}^{95\%} < \xi < t_{N-M}^{95\%}) = 0,95 \quad (35)$$

se tiene que

$$P(\hat{x}_i - t_{N-M}^{95\%} \sqrt{\alpha_{ii}} s < x_i < \hat{x}_i + t_{N-M}^{95\%} \sqrt{\alpha_{ii}} s) = 0,95 \quad (36)$$

Sin embargo, para el problema presente la hipótesis (30) presenta una dificultad, ya que, dependiendo del tipo de captador, cabe esperar una desviación típica distinta en su error. En tales circunstancias se dice que el modelo es heterocedástico. La dificultad es salvable afortunadamente a través de la introducción de algo parecido a un cambio de unidades, de manera que se iguale la variabilidad de todos los captadores. Efectivamente, refiriéndonos a la segunda versión del método y suponiendo que  $\sigma^{cpt}$ ,  $\sigma^{cpa}$ ,  $\sigma^{exte}$  y  $\sigma^{conv}$  son las desviaciones típicas conocidas de los errores en cada tipo de instrumento, antes de montar el sistema (16), las respectivas ecuaciones pueden ser ponderadas por coeficientes  $W^{cpt}$ ,  $W^{cpa}$ ,  $W^{exte}$  y  $W^{conv}$  obteniendo el nuevo sistema.

$$\begin{bmatrix} W^{cpt} y^{cpt} \\ W^{cpa} (y^{cpa} - A_u^{cpa} d) \\ W^{exte} (y^{exte} - A_u^{exte} d) \\ W^{conv} (y^{conv} - A_u^{conv} d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{cpt} A_p^{cpt} \\ W^{cpa} (A_p^{cpa} - A_u^{cpa} c) \\ W^{exte} (A_p^{exte} - A_u^{exte} c) \\ W^{conv} (A_p^{conv} - A_u^{conv} c) \end{bmatrix} [p] \quad (37)$$

Resulta ahora fácil comprender que eligiendo coeficientes de ponderación de valor

$$W^{cpt} = \sigma / \sigma^{cpt}; \quad W^{cpa} = \sigma / \sigma^{cpa} \quad (38)$$

$$W^{exte} = \sigma / \sigma^{exte}; \quad W^{conv} = \sigma / \sigma^{conv}$$

donde  $\sigma$  es una cantidad adimensional arbitraria, se obtiene una desviación típica  $\sigma$  homogénea en los errores de todos los datos.

Es importante señalar que los intervalos de confianza calculados en (36) no tienen ninguna validez si no se conocen a priori las variabilidades de los distintos tipos de datos y se introduce esta información en los coeficientes de ponderación a través de (38). Dicha estrategia no es aplicable a la primera versión del método (sistema (10)) porque la desviación típica de los errores en las ecuaciones de equilibrio es en teoría nula y no se podría calcular su coeficiente de ponderación.

### 5. EJEMPLO.-

En el estado actual de este estudio, el método todavía no ha sido aplicado a problemas reales, por lo que el ejemplo que se incluye aquí es puramente teórico, si bien puede servir para comprobar el funcionamiento del método.

Se trata de un modelo de geometría sencilla (Fig.4) que simula el sostenimiento mediante seis barras formando un hexágono irregular y el terreno mediante otras seis barras en dirección radial.

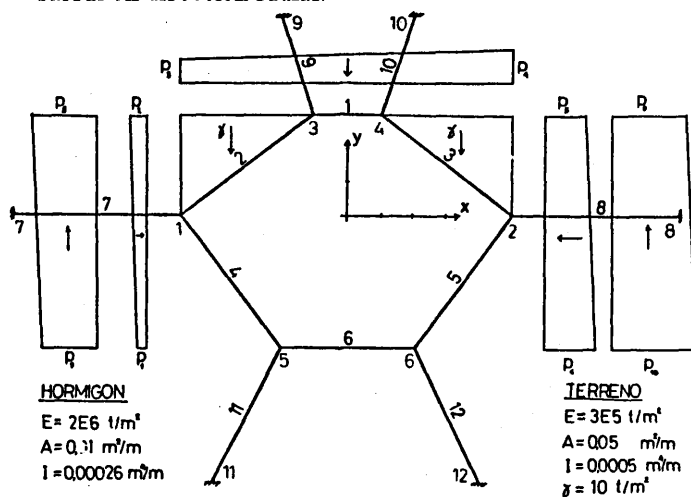


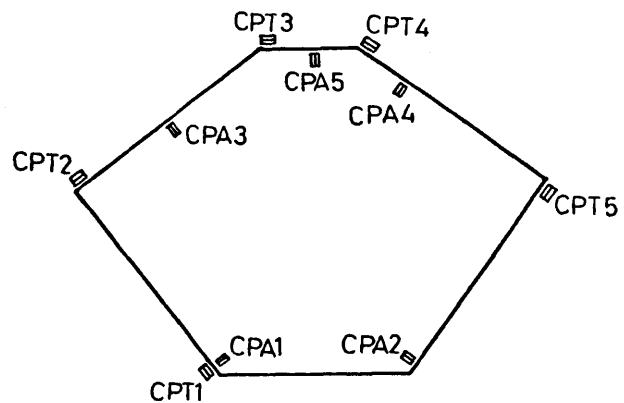
Fig.4: Ejemplo de prueba.

La sección del túnel ha sido instrumentada con cinco células de presión transversal (CPT1 a CPT5 en Fig.5a), cinco células de presión axial (CPA1 a CPA5 en Fig.5a), cinco extensómetros (EXTE1 a EXTE5 en Fig.5b) y cinco convergencias (CONV1 a CONV5 en Fig.5b).

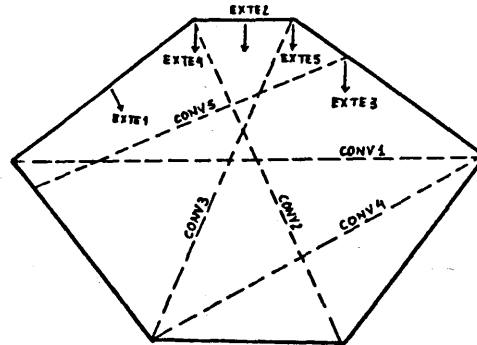
Los valores teóricos de los parámetros de presión a identificar se han fijado arbitrariamente de la siguiente forma:

$$p_1 = 1; p_2 = 2; p_3 = 3; p_4 = 4; p_5 = 5; \quad (39)$$

$$p_6 = 6; p_7 = 7; p_8 = 8; p_9 = 9; p_{10} = 10 \text{ T/m}^2$$



a) Células de presión transversal y axial.



b) Extensómetros y convergencias.

Fig.5: Instrumentación de la sección ejemplo.

y con ayuda de un programa de cálculo matricial, o utilizando simples consideraciones geométricas en el caso de las células de presión transversal, se han calculado las mediciones teóricas que han de aparecer en los captadores utilizados. Con el fin de dar un mayor realismo al problema, se han añadido unos errores artificiales a dichas mediciones teóricas antes de ser introducidas en el algoritmo. Dichos errores fueron extraídos de la tabla de desviaciones normales de Wold y multiplicados por unas desviaciones típicas que se eligieron de valor ficticio:

$$\sigma^{cpt} = 0,05 \text{ T/m}^2; \quad \sigma^{cpa} = 5 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma^{exte} = 0,00025 \text{ m}; \quad \sigma^{conv} = 0,0005 \text{ m} \quad (40)$$

De acuerdo con la expresión (38), los valores que se adoptaron para los coeficientes de ponderación fueron:

$$W^{cpt} = \frac{100}{0,05} = 2000 \frac{\text{m}^2}{\text{T}}$$

$$W^{cpa} = \frac{100}{5} = 20 \frac{\text{m}^2}{\text{T}}$$

$$W^{exte} = \frac{100}{0,00025} = 400000 \text{ m}^{-1}$$

$$W^{conv} = \frac{100}{0,0005} = 200000 \text{ m}^{-1}$$

donde se asignó un valor de 100 a  $\sigma$ (38).

Los valores finalmente introducidos, con el error expresado como sumando, se hallan recogidos en la tabla 1.

**TABLA 1. MEDICIONES INTRODUCIDAS**

CPT	TENSION (T/m <sup>2</sup> )	CPA	TENSION (T/m <sup>2</sup> )
1	- 4,000 - 0,042	1	-1314,50 + 4,15
2	-18,051 + 0,034	2	- 805,35 + 6,35
3	- 3,400 + 0,006	3	+ 408,88 + 5,05
4	+ 0,216 + 0,053	4	+ 784,20 - 2,70
5	- 8,000 + 0,005	5	+ 197,40 + 1,40

EXTE DESPLAZAMIENTO (m)	CONV ENSANCHAMIENTO (m)
1 + 0,0533127 + 0,000343	1 - 0,0036895 + 0,00775
2 - 0,0028006 - 0,000193	2 - 0,004502 - 0,000460
3 + 0,029486 - 0,000223	3 - 0,001826 - 0,00100
4 + 0,0073587 + 0,000153	4 - 0,0049553 + 0,000555
5 + 0,00066329 - 0,000635	5 - 0,0192901 - 0,000760

Las estimaciones obtenidas para los parámetros de presión son las que se recogen en la Tabla 2, junto con los intervalos de confianza asociados. Dichas estimaciones presentan pequeños errores apreciables si se comparan con la que sería la solución exacta (39). No obstante, los intervalos de confianza sirven para delimitar la magnitud de esos errores. Se ha elegido para ellos un grado de confianza del 50%, cuando lo usual es tomar el 90 ó 95%, precisamente para comprobar el correcto comportamiento de dichos intervalos. Efectivamente, se observa que la solución exacta (39) se halla dentro de dichos intervalos en un promedio de 3/10 veces, el cual es perfectamente razonable teniendo en cuenta que se refiere a una muestra muy pequeña (el valor teórico para una muestra infinita sería de 50% ó 5/10).

**TABLA 2. PRESIONES ESTIMADAS**

PRESION	VALOR	INTERVALO DE CONF. (50%)
1	1,11533	1,06089 1,16976
2	1,85768	1,78036 1,93501
3	2,95243	2,87782 3,02703
4	4,04142	3,92934 4,15349
5	5,12071	5,04197 5,19945
6	5,77630	5,68806 5,86453
7	6,92880	6,85765 6,99994
8	8,06170	7,93490 8,18850
9	9,17186	9,07506 9,26866
10	9,87094	9,78574 9,95614

El valor del estimador  $s$  de la expresión (31) -que en este caso debe tender a 100- fué calculado también:

$$s = 96,34 \pm 43,08$$

siendo 43,08 la raíz cuadrada del error standard de  $s^2$ . Aunque no se recoge aquí, el test (34) para detectar datos atípicos fué efectuado para las veinte mediciones resultando negativo en todas ellas.

## 6. CONCLUSIONES.-

Se ha desarrollado y probado con un ejemplo teórico un procedimiento para la estimación de la distribución de presiones que actúan sobre un túnel a partir de los datos de la estructura y de un número mínimo de mediciones in situ. Dicho procedimiento se ve reforzado en su rigor estadístico al aprovechar la teoría de los modelos de regresión. La próxima aplicación al problema real para el que fué desarrollado el método se espera aporte la experiencia necesaria para juzgar su utilidad, la cual podría verse especialmente limitada por la tecnología de los aparatos de medida de que se dispone actualmente. La simplificación del modelo de distribución de presiones (por ejemplo utilizando distribuciones uniformes) conllevaría una reducción del número de incógnitas que puede ser interesante en el caso en que se disponga de pocos datos o los errores de medida sean muy grandes.

## 7. AGRADECIMIENTO.-

Este estudio ha sido desarrollado gracias a la motivación y apoyo proporcionado por la Demarcación de Carreteras del MOPU a través de sus técnicos Ignacio García Arango y Fernando Hacar, siendo también de agradecer las sugerencias recibidas de Alberto Abella.

## 8. REFERENCIAS.-

- [1] E. Alarcón, R. Alvarez, M.S. Gómez. "Cálculo Matricial de Estructuras". Reverté (1986).
- [2] J. Molina, E. Alarcón. "Método para la identificación de las Presiones Actuales sobre un Túnel". Informe interno (1990).
- [3] D. Peña. "Estadística, Modelos y Métodos". Tomo 2. Alianza Editorial (1987).
- [4] S. Ríos. "Métodos Estadísticos". Ediciones del Castillo. (1977).